CALCUL RAPIDE DE LA PARITE DE $\prod(x)$

Par H. LIFCHITZ

Mars 1998 (corrigé en Octobre 2001)

Soit $\prod(x)$ = Nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à x.

$|x|$=partie entière de x, et $\Omega(x)$ le nombre de diviseurs premiers de x (avec répétition).

$\Omega(x)$ est additive, $\Omega(1) = \Omega(0) = 0$, $\Omega(p) = 1$ et $\Omega(x.y) = \Omega(x) + \Omega(y)$

$$\boxed{\Omega(x!) = \sum_{P_i \le x} \left|\frac{x}{P_i}\right| + \sum_{P_i \le x^{1/2}} \left|\frac{x}{{P_i}^2}\right| + \sum_{P_i \le x^{1/3}} \left|\frac{x}{{P_i}^3}\right| + \cdots} \qquad (1)$$

En effet $x! = 2^{\left|\frac{x}{2}\right|+\left|\frac{x}{2^2}\right|+\cdots}.3^{\left|\frac{x}{3}\right|+\left|\frac{x}{3^2}\right|+\cdots}.5^{\left|\frac{x}{5}\right|+\left|\frac{x}{5^2}\right|+\cdots}\cdots$, donc

$$\begin{aligned}\Omega(x!) = {} & \left|\tfrac{x}{2}\right| + \left|\tfrac{x}{2^2}\right| + \left|\tfrac{x}{2^3}\right| + \cdots \\ & + \left|\tfrac{x}{3}\right| + \left|\tfrac{x}{3^2}\right| + \left|\tfrac{x}{3^3}\right| + \cdots \\ & \quad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots\end{aligned}$$

En sommant verticalement on obtient (1)

$$\boxed{\sum_{P_i \le x^{1/a}} \left|\frac{x}{{P_i}^a}\right| = \sum_{i=1}^{i=\left|\frac{x}{2^a}\right|} \prod\left[\left(\frac{x}{i}\right)^{1/a}\right]} \qquad (2)$$

En effet $\left|\frac{x}{{P_i}^a}\right| = 1$ quand $1 \le \frac{x}{{P_i}^a} < 2$ ou $\frac{x}{2} < {P_i}^a \le x$ ou $\left(\frac{x}{2}\right)^{1/a} < P_i \le x^{1/a}$

Donc $\displaystyle\sum_{P_i \leq x^{1/a}} \left| \frac{x}{{P_i}^a} \right| = \sum_{P_i \leq \left(\frac{x}{2}\right)^{1/a}} \left| \frac{x}{{P_i}^a} \right| + \prod \left[x^{1/a} \right] - \prod \left[\left(\frac{x}{2}\right)^{1/a} \right]$

puis $\displaystyle\sum_{P_i \leq x^{1/a}} \left| \frac{x}{{P_i}^a} \right| = \sum_{P_i \leq \left(\frac{x}{3}\right)^{1/a}} \left| \frac{x}{{P_i}^a} \right| + \prod \left[x^{1/a} \right] - \prod \left[\left(\frac{x}{2}\right)^{1/a} \right] - 2 \prod \left[\left(\frac{x}{3}\right)^{1/a} \right]$

et il vient (2) en continuant le processus.

Posons $\boxed{\displaystyle\Psi_\Omega(x) = \sum_{i=1}^{i=|log_2 x|} \prod \left(x^{1/i} \right)}$ (3)

Par inversion de moëbius on a $\boxed{\displaystyle\prod(x) = \sum_{i=1}^{i=|log_2 x|} \mu(i) \Psi_\Omega \left(x^{1/i} \right)}$ (4)

On a alors $\boxed{\displaystyle\sum_{i \leq x} \Psi_\Omega \left(\frac{x}{i} \right) = \Omega(x!)}$ (5)

puisque $\displaystyle\sum_{i \leq x} \Psi_\Omega \left(\frac{x}{i} \right) = \sum_{P_i \leq x} \left| \frac{x}{P_i} \right| + \sum_{P_i \leq \left|x^{1/2}\right|} \left| \frac{x}{{P_i}^2} \right| + \sum_{P_i \leq \left|x^{1/3}\right|} \left| \frac{x}{{P_i}^3} \right| + \cdots$

En inversant (5) il vient $\boxed{\displaystyle\Psi_\Omega(x) = \sum_{i \leq x} \mu(i) \Omega \left[\left(\frac{x}{i} \right)! \right]}$ (6)

En développant la partie droite de (6) on trouve :

$$\Psi_\Omega(x) = \sum_{P_i \leq x} \left| \frac{x}{P_i} \right| - 2 * \sum_{P_i < P_j \leq x} \left| \frac{x}{P_i.P_j} \right| + 3 * \sum_{P_i < P_j < P_k \leq x} \left| \frac{x}{P_i.P_j.P_k} \right| - 4 * \sum_{P_i < P_j < P_k < P_l \leq x} \left| \frac{x}{P_i.P_j.P_k.P_l} \right| + \cdots$$

Posons $\displaystyle A_1(x) = \sum_{P_i \leq x} \left| \frac{x}{P_i} \right|, A_2(x) = \sum_{P_i < P_j \leq x} \left| \frac{x}{P_i.P_j} \right|, A_3(x) = \sum_{P_i < P_j < P_k \leq x} \left| \frac{x}{P_i.P_j.P_k} \right|, etc \cdots$

Alors $\boxed{\Psi_\Omega(x) = A_1(x) - 2.A_2(x) + 3.A_3(x) - 4.A_4(x) + \cdots}$ (7)

Or $\displaystyle\sum_{i \leq x} \mu(i) \left| \frac{x}{i} \right| = 1$

Soit aussi $\boxed{x - 1 = A_1(x) - A_2(x) + A_3(x) - A_4(x) + \cdots}$ (8)

(7)-(8) entrainent $\boxed{\Psi_\Omega(x) = x - 1 - A_2(x) + 2.A_3(x) - 3.A_4(x) + 4.A_5(x) - \cdots}$ (9)

On notera que $\Psi_\Omega(x) = x - 1$ pour $1 < x < 6$ et $\Psi_\Omega(0) = 0$

On a donc $\boxed{\Psi_\Omega(x) \equiv x - 1 - A_2(x) - A_4(x) - A_6(x) - \cdots [2]}$ (10)

Or $\boxed{\sum_{i\leq x} Q\left(\frac{x}{i}\right) = 2(A_2(x)+A_4(x)+A_6(x)+\cdots)+2x-1}$ (11)

avec $Q(x)$ nombre de "squarefree" $\leq x$

En effet si l'on pose $\prod_k(x)$ = nombre de "squarefree"$\leq x$ ayant k facteurs premiers, on a aussi :

$$A_1(x) = \sum_{i\leq\left\lfloor\frac{x}{2}\right\rfloor} \prod\left(\frac{x}{i}\right),\quad A_2(x) = \sum_{i\leq\left\lfloor\frac{x}{6}\right\rfloor} \prod_2\left(\frac{x}{i}\right),\quad A_3(x) = \sum_{i\leq\left\lfloor\frac{x}{30}\right\rfloor} \prod_3\left(\frac{x}{i}\right), etc\cdots$$

et $A_1(x)+A_2(x)+A_3(x)+A_4(x)+\cdots = \sum_{i\leq\left\lfloor\frac{x}{2}\right\rfloor} \prod\left(\frac{x}{i}\right) + \sum_{i\leq\left\lfloor\frac{x}{6}\right\rfloor} \prod_2\left(\frac{x}{i}\right) + \sum_{i\leq\left\lfloor\frac{x}{30}\right\rfloor} \prod_3\left(\frac{x}{i}\right)+\cdots$

Or $Q(x) = 1+\prod(x)+\prod_2(x)+\prod_3(x)+\prod_4(x)+\cdots$

Donc $\boxed{A_1(x)+A_2(x)+A_3(x)+A_4(x)+\cdots = \sum_{i\leq x} Q\left(\frac{x}{i}\right)-x}$ (12)

Si l'on pose $SQ(x) = \sum_{i\leq x} Q\left(\frac{x}{i}\right)$

(8) et (12) entrainent $2(A_2(x)+A_4(x)+A_6(x)+A_8(x)+\cdots) = SQ(x)-2x+1$, ce qui démontre (11)

et aussi $\boxed{SQ(x) = \sum_{i\leq x} Q\left(\frac{x}{i}\right) \equiv 1\,[2] \quad \forall x}$ (13)

(10) et (11) entrainent $\boxed{\Psi_\Omega(x) \equiv \frac{SQ(x)-1}{2}\,[2]}$ (14)

Soit $F1(x)=\sum_{i\leq x}\left\lfloor\frac{x}{i}\right\rfloor$, il est facile de montrer que $F1(x)=2\sum_{i=1}^{i=\lfloor\sqrt{x}\rfloor}\left\lfloor\frac{x}{i}\right\rfloor-\lfloor\sqrt{x}\rfloor^2$

Appelons $\boxed{F1r(x) = \sum_{i\leq\lfloor\sqrt{x}\rfloor}\left\lfloor\frac{x}{i}\right\rfloor}$, on a donc $F1(x) = 2.F1r(x)-\lfloor\sqrt{x}\rfloor^2$ et $\boxed{F1(x)\equiv\lfloor\sqrt{x}\rfloor\,[2]}$ (15)

Or $\boxed{F1(x) = \sum_{i\leq\lfloor\sqrt{x}\rfloor} SQ\left(\frac{x}{i^2}\right)}$ (16) et par inversion de moëbius $\boxed{SQ(x) = \sum_{i\leq\lfloor\sqrt{x}\rfloor}\mu(i).F1\left(\frac{x}{i^2}\right)}$ (17)

Donc $SQ(x) = \sum_{i\leq\lfloor\sqrt{x}\rfloor}\mu(i)\left[2.F1r\left(\frac{x}{i^2}\right)-\left\lfloor\sqrt{\frac{x}{i^2}}\right\rfloor^2\right] = 2\sum_{i\leq\lfloor\sqrt{x}\rfloor}\mu(i).F1r\left(\frac{x}{i^2}\right)-\sum_{i\leq\lfloor\sqrt{x}\rfloor}\mu(i).\left\lfloor\frac{\sqrt{x}}{i}\right\rfloor^2$

Posons $$\boxed{SQ_1(x) = \frac{SQ(x)-1}{2} = \sum_{i\leq\lfloor\sqrt{x}\rfloor}\mu(i).F1r\left(\frac{x}{i^2}\right)-\left(\frac{\sum_{i\leq\lfloor\sqrt{x}\rfloor}\mu(i)\left\lfloor\frac{\sqrt{x}}{i}\right\rfloor^2+1}{2}\right)}$$ (18)

Posons $SR(x) = \sum_{i \leq \lfloor \sqrt{x} \rfloor} \mu(i) \left\lfloor \frac{\sqrt{x}}{i} \right\rfloor^2$

$\left\lfloor \frac{\sqrt{x}}{i} \right\rfloor = 1$ pour $\frac{\sqrt{x}}{2} < i \leq \sqrt{x}$, donc $SR(x) = \sum_{i \leq \left\lfloor \frac{\sqrt{x}}{2} \right\rfloor} \mu(i) \left\lfloor \frac{\sqrt{x}}{i} \right\rfloor^2 + \sum_{i=\left\lfloor \frac{\sqrt{x}}{2} \right\rfloor+1}^{i=\lfloor \sqrt{x} \rfloor} \mu(i)$

$\left\lfloor \frac{\sqrt{x}}{i} \right\rfloor = 2$ pour $\frac{\sqrt{x}}{3} < i \leq \frac{\sqrt{x}}{2}$, donc $SR(x) = \sum_{i \leq \left\lfloor \frac{\sqrt{x}}{3} \right\rfloor} \mu(i) \left\lfloor \frac{\sqrt{x}}{i} \right\rfloor^2 + 4 \sum_{i=\left\lfloor \frac{\sqrt{x}}{3} \right\rfloor+1}^{i=\left\lfloor \frac{\sqrt{x}}{2} \right\rfloor} \mu(i) + \sum_{i=\left\lfloor \frac{\sqrt{x}}{2} \right\rfloor+1}^{i=\lfloor \sqrt{x} \rfloor} \mu(i)$

En continuant le processus il vient $SR(x) = \sum_{i=1}^{i=\lfloor \sqrt{x} \rfloor} i^2 \sum_{j=\left\lfloor \frac{\sqrt{x}}{i+1} \right\rfloor+1}^{j=\left\lfloor \frac{\sqrt{x}}{i} \right\rfloor} \mu(j)$

Comme $x^2 \equiv 0[4]$ pour x pair et $x^2 \equiv 1[4]$ pour x impair

On a donc $SR(x) \equiv \sum_{\text{i impair} \leq \lfloor \sqrt{x} \rfloor} \sum_{j=\left\lfloor \frac{\sqrt{x}}{i+1} \right\rfloor+1}^{j=\left\lfloor \frac{\sqrt{x}}{i} \right\rfloor} \mu(j) \quad [4]$

Or $\sum_{i=a+1}^{i=b} \mu(i) = M(b) - M(a)$ avec $M(x)$ fonction sommatoire de moëbius

Donc $SR(x) \equiv M\left(\sqrt{x}\right) - M\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right) + M\left(\frac{\sqrt{x}}{3}\right) - M\left(\frac{\sqrt{x}}{4}\right) + \cdots [4]$

Or $M(x) - M\left(\frac{x}{2}\right) + M\left(\frac{x}{3}\right) - M\left(\frac{x}{4}\right) + \cdots = -1$ propriété de $M(x)$ pour $x \geq 2$

Donc $SR(x) = \sum_{i \leq \sqrt{x}} \mu(i) \left\lfloor \frac{\sqrt{x}}{i} \right\rfloor^2 \equiv -1[4]$ pour $x \geq 4$

Et (18) entraine $\boxed{SQ_1(x) \equiv \sum_{i \leq \lfloor \sqrt{x} \rfloor} \mu(i) F1r\left(\frac{x}{i^2}\right) [2]}$ (19)

Donc $\boxed{\Psi_\Omega(x) \equiv SQ_1(x)[2]}$ (20)

Et finalement avec (4) $\boxed{\boxed{\prod(x) \equiv \sum_{i=1}^{i=\lfloor log_2 x \rfloor} \mu(i) SQ_1(x^{1/i})[2]}}$ (21)

Cette expression permet de calculer la parité de $\prod(x)$ avec une complexité en $O\left(x^{1/2} * logx\right)$ et avec

un espace de stockage en $O(1)$.